www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

OPTION GÉNÉRALE PRIME

DURÉE : 4 heures

Concours National d'admission 1990

MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse

Avec ce sujet sera distribuée une feuille de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat sera assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'épreuve est constituée d'un exercice noté sur 5 points et d'un problème noté sur 15 points.

EXERCICE (*5 points*)

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
θ désigne l'endomorphisme nul, $\circ$ la loi de composition des applications. f^n la composée de n applications égales à f et par convention, f^0 l'identité de $\mathbb{R}^3$.
Soit f et id les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrices respectives M et I dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. 1° Déterminer par la méthode du pivot de Gauss la matrice M^{-1}.

2° Trouver la dimension et une base du noyau et de l'image de $f - id$.

3° Trouver la dimension et une base du noyau et de l'image de $f - 2id$.

II. Soit $\vec{u} = (0, 1, 1)$; $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

1° Montrer que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2° Déterminer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Trouver la matrice de f dans la base B.

3° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)id$.

III. Pour tout réel t, soit $g_t = (e^{2t} - e^t)f + (2e^t - e^{2t})id$.

1° Démontrer les égalités suivantes :

$$(f - id)^2 = f - id; \quad (2id - f)^2 = (2id - f); \quad (f - id) \circ (2id - f) = (2id - f) \circ (f - id) = \theta$$

2° *a*) Démontrer que : $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \quad g_t \circ g_s = g_{t+s}$

b) Prouver que g_t est bijectif et déterminer g_t^{-1}

c) Pour n élément de $\mathbb{N}$, déterminer g_t^n.

PROBLÈME (*15 points*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x} \ln x$. Soit C la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\|\vec{i}\| = 5$ cm, $\|\vec{j}\| = 10$ cm.
Soit U la suite de terme général u_n définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = -\ln n + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

I. 1° *a*) Étudier les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = 1 - x \ln x$.

b) Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
Déterminer l'entier n_0 tel que $\frac{n_0}{1\,000} \leqslant \alpha < \frac{n_0 + 1}{1\,000}$.

c) Préciser le signe de $\varphi(x)$.

2° *a*) Utiliser le signe de φ pour déterminer le sens de variation de f.

b) Déterminer les limites de f en zéro et en $+\infty$. Préciser les branches infinies de C.

c) Construire C.

II. 1° Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

Tournez la page S.V.P.

2° Démontrer que la suite U est bornée.

3° Établir que la suite U est convergente.

4° Déterminer une valeur approchée de u_5, u_{10}, u_{100}. On donnera les six premières décimales fournies par la calculatrice.

III. 1° Montrer que pour tout réel x, $1 + x \leqslant e^x$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, n], \quad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, n], \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$

2° Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x élément de $[0, 1]$, $(1 - x)^n + nx - 1 \geqslant 0$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, n], \quad 1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$

3° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, n], \quad 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$

IV. Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, soit $J_n = \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t} dt$ et $K_n = \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt$

1° Justifier l'existence de K_n.
Démontrer la convergence de l'intégrale J_n.

2° *a*) Montrer que $J_n + K_n = \int_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t} dt + \int_1^n \frac{dt}{t}$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1 - (1 - x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1 - x)^p$$

3° Soit $J = \int_0^1 f(t)\, dt$

a) Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge.

b) Vérifier que : $\forall \varepsilon \in]0, 1], \quad \int_\varepsilon^1 f(t)\, dt = (e^{-\varepsilon} - 1) \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$

En déduire que $J = \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$

4° Soit $K = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \leqslant \int_1^x e^{-t} dt$

En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

b) Montrer que pour tout réel x supérieur à 1, $\int_1^x f(t)\, dt = -e^{-x} \ln x + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$

En déduire que $K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

V. 1° En utilisant les résultats du III. démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant J - J_n \leqslant \frac{1}{n} \int_0^1 t e^{-t} dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt - K_n \leqslant \frac{1}{n} \int_1^n t e^{-t} dt$$

2° *a*) Calculer $\int_1^n t e^{-t} dt$.

b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} J_n = J$ et $\lim_{n \to +\infty} K_n = K$.

3° En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ en fonction de la limite de U.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail